1) (2 val) Um sistema vibratório com um grau de liberdade e amortecido é sujeito a diferentes solicitações.
Caracterizar sucintamente e esboçar graficamente (indicando eventuais pontos notáveis) a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (30%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$, $f(t) = F^*\delta(t-\tau)$;

b) (30%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$, $f(t) = F_0\mu(t-\tau)$.

O sistema é sujeito a uma solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$ cuja frequência fundamental $\omega = 2\pi / T$ é menor do que a frequência de ressonância do sistema. No entanto, o sistema responde com um nível de vibração elevado.

c) (40%) Diagnosticar a causa de tal comportamento.

2) (2 val) Considerar um sistema vibratório com um grau de liberdade em regime forçado.

a) (25%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos notáveis.

b) (25%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação arbitrária;

c) (25%) Definir espectro de resposta transiente e indicar a sua principal utilidade.

d) (25%) Um sistema não amortecido em regime forçado harmónico, quando excitado a uma frequência idêntica à sua frequência natural, responde com uma amplitude que aumenta indefinidamente (sem limite). Com base na análise de forças actuantes sobre o sistema, explicar este comportamento.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$.

a) (25%) Definir modos naturais de vibração;

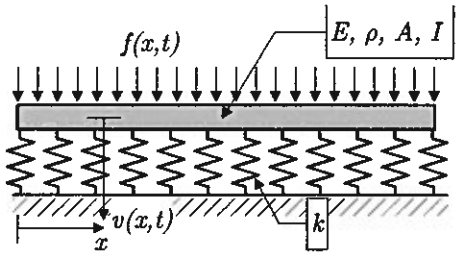
b) (25%) Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

c) (25%) Referir qual o interesse da representação do sistema de equações de movimento na base modal.

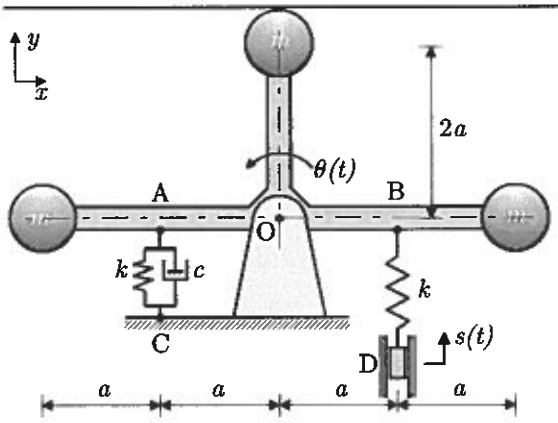
d) (25%) Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva? A matriz de rigidez é sempre definida positiva? Justificar.

4) (2 val) O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma equação diferencial de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de variáveis.

a) (40%) O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípio(s) se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.



b) (60%) A figura representa uma viga suportada por uma suspensão elástica de rigidez distribuída. Isolar um elemento infinitesimal e estabelecer a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli.



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida em forma de T articulada no ponto **O** e com uma massa concentrada m em cada uma das extremidades. A massa da barra é desprezável em face das massas concentradas. No ponto **A**, estão ligadas à barra uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante de amortecimento c. No ponto **B**, está ligada à barra uma mola de rigidez k. A outra extremidade desta última mola está submetida a um deslocamento $s(t)$ na vertical. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, as molas não estão deformadas. Se, com $s(t) = 0$, for aplicada ao sistema uma perturbação inicial tal que $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ rad/s, o sistema responde conforme se representa na figura abaixo.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, admitir que a equação de movimento é,
$0.015\ddot{\theta}(t) + 0.0025c\dot{\theta}(t) + (0.005k - 0.4905)\theta(t) = 0.05ks(t)$.

Determinar,

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

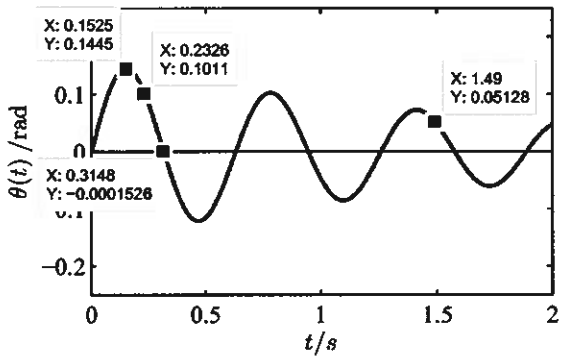
c) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k das molas;

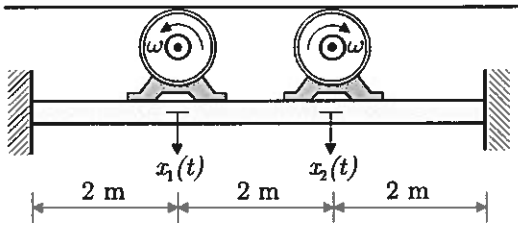
e) (10%) a constante de amortecimento c;

f) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor quando, após aplicação da perturbação inicial descrita acima, o sistema regressa ao estado de repouso.

g) (20%) Para $a = 0.05$ m e $s(t) = 5 \times 10^{-3}\cos(\omega t)$ m, considerando apenas o regime estacionário, determinar a(s) frequência(s) de excitação de modo que a amplitude do deslocamento de cada uma das massas seja igual a 0.01 m e que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ seja superior a $\pi / 2$.



Resposta livre ou natural



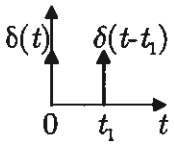
2) (4 val.) Uma máquina de 350 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

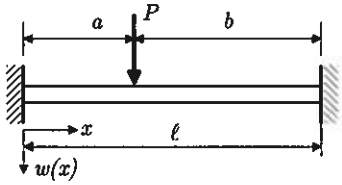
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

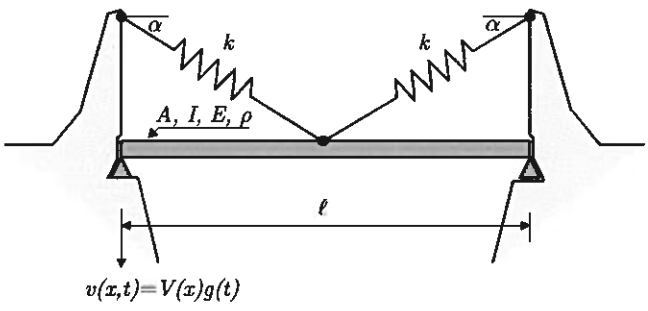
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t = 0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Parte Teórica - Exame de Recurso - 2008-07-11

1) a) $x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

com $h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}(\omega_d(t-\tau))$

A resposta a uma solicitação impulsiva é:

$$x(t) = \frac{F^*}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}(\omega_d(t-\tau))$$

É portanto uma resposta harmónica (com decaimento se $\xi > 0$) cuja amplitude máxima é igual a $\frac{F^*}{m\omega_d}$



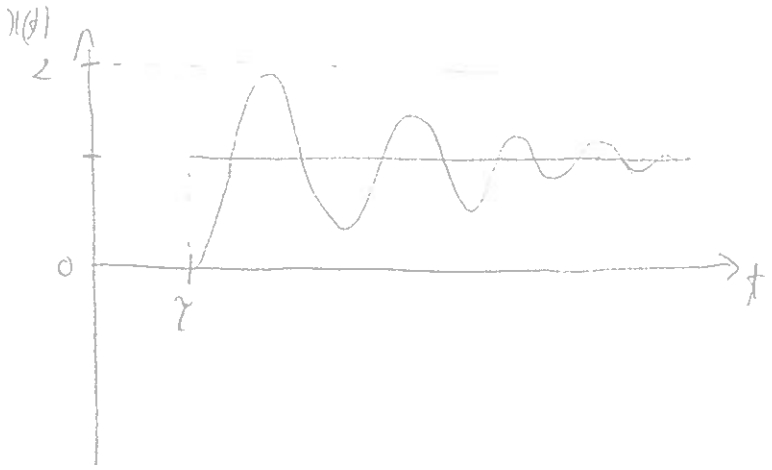
b) A resposta é do tipo:

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \operatorname{sen}(\omega_d(t-\tau))\, d\tau$$

Simplificando: $\xi = 0$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d}\left(-\frac{1}{-\omega_d}\cos(\omega_d(t-\tau))\right)_0^t = \frac{F_0}{m\omega_d}\left(\frac{1}{\omega_d} - \frac{1}{\omega_d}\cos\omega_n t\right)$$

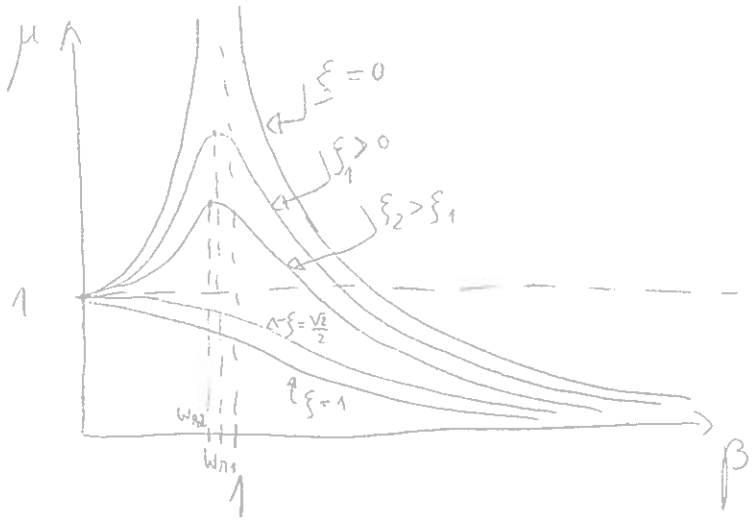
$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t) = \frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$



c) A solicitação pode ser decomposta numa série de Fourier em que cada harmónico tem de frequência pw (com p sendo a ordem do harmónico). A resposta é obtida por sobreposição dos efeitos de cada harmónico de solicitação, sendo por sua vez um harmónico desfasado mas com a mesma frequência pw. Como se pode ver, o facto de o período global ter um valor que conduz a uma frequência abaixo da frequência natural não quer dizer que não haja um harmónico da resposta com que a sua frequência seja próxima da frequência natural. Quando isso acontece, sabe-se que o factor de amplificação aumenta muito, podendo tornar esse harmónico no harmónico predominante (e causando grande vibração).

d) Factor de amplificação dinâmica é o factor adimensional que multiplica o valor do deslocamento estático $\left(\frac{F}{k}\right)$ e que portanto traduz o efeito amplificador do movimento alternado do sistema no seu próprio deslocamento.

Define-se como: $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



$$\omega_n = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

b) O impulso pode ser aplicado em instante genérico: $t = \tau$

Assim sendo a resposta a um impulso unitário vem:

$$h(t - \tau)$$

Seja a excitação arbitrária: $f(t)$

Então, para obter a expressão da resposta total do sistema é necessário integrar do instante inicial, $\tau = 0$, até ao instante pretendido $\tau = t$:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau$$

Notar que esta é a resposta estacionária, apenas.

c) O espectro de resposta transiente é uma representação gráfica da resposta máxima adimensional de um sistema com um grau de liberdade a uma excitação transiente em função de uma razão adimensional da frequência ou do tempo.

Como vantagens temos de referir que permite perceber qual a amplitude máxima das amplitudes máximas e para que instante (ou frequência) ocorre, para além de que o facto de estar adimensionalizado torna este espetro mais geral (podendo ser aplicado para diferentes aplicações numéricas de um mesmo sistema).

d) Para entender este fenómeno basta analisar em separado as duas componentes das respostas (transitória e estacionária). A resposta transitória para sistemas não amortecidos é "permanente" (!) pois não há dissipação de energia. Esta resposta é harmónica e tem uma frequência ω_n. Se a esta resposta adicionarmos o efeito da solicitação harmónica, <u>in fase</u>, percebemos que a magnitude da resposta crescerá indefinidamente porque nunca se dissipa energia.

3) ; 4) Não sabem. //

<u>PARTE PRÁTICA</u>

1) Feito anteriormente

2) ; 3) Não sabem //